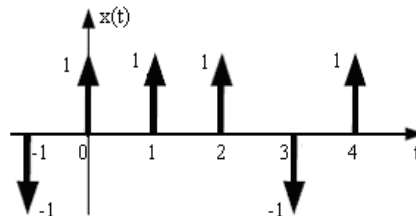


# Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

## IV. tjedan

1. Kontinuirani signal  $x(t)$  (Slika 1.) periodičan je s periodom  $T=4$  s. Prikažite ovaj signal Fourierovim redom, te odredite koeficijente tog reda.



Slika 1.

### Rješenje:

Koeficijenti Fourierovog reda se računaju prema formuli

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Za zadani slučaj, uvrštavamo u formulu:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{4} \int_{-0.5}^{3.5} x(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_{-0.5}^{0.5} \delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \int_{0.5}^{1.5} \delta(t-1) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{1.5}^{2.5} \delta(t-2) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt - \int_{2.5}^{3.5} \delta(t-3) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 0} + e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 1} + e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 2} - e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 3} \right) \end{aligned}$$

Pojednostavimo:

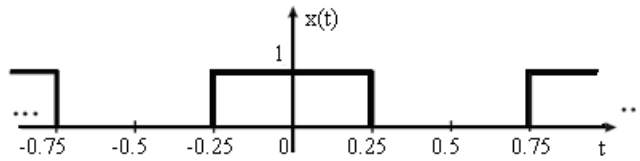
$$\begin{aligned} e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 0} &= 1 \\ e^{-jk\frac{\pi}{2}} &= \left( e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)^k = \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^k = (-j)^k \\ e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 2} &= \left( e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2} \right)^k = \left( \cos(\pi) - j \cdot \sin(\pi) \right)^k = (-1)^k \\ e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 3} &= \left( e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3} \right)^k = \left( \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)^k = j^k \end{aligned}$$

Pa je traženi Fourierov red:

$$X_k = \frac{1}{4} (1 + (-j)^k + (-1)^k - j^k).$$

Dodatak: Skicirajte amplitudni i fazni spektar.

2. Slikom 2. dan je periodičan kontinuirani signal  $x(t)$ . Odredite srednju snagu ovog signala (u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni), te aproksimirajte signal Fourierovim redom.



Slika 2.

### Rješenje:

Koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema formuli

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Period zadanog signala je  $T_0 = 1$ , pa je  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$ . Koeficijente možemo računati na intervalu  $(-0.5, 0.5)$ . Uvrštavamo u formulu:

$$X_k = \int_{-0.5}^{0.5} x(t) e^{-jk2\pi t} dt$$

Gledajući sliku, vidljivo je da signal na intervalu  $(-0.5, -0.25)$  i  $(0.25, 0.5)$  ima vrijednost nulu, dok mu je između tih intervala vrijednost jedan. Integral se sada može napisati u obliku:

$$X_k = \int_{-0.25}^{0.25} e^{-jk2\pi t} dt = \frac{e^{-jk2\pi t}}{-jk2\pi} \Big|_{-0.25}^{0.25} = \frac{1}{-jk2\pi} \left( e^{-\frac{jk\pi}{2}} - e^{+\frac{jk\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}}.$$

Poseban slučaj je za  $k = 0$ , za koji Fourierov koeficijent iznosi  $X_0 = \int_{-0.25}^{0.25} dt = \frac{1}{2}$ .

Kako je zadani signal bio parna funkcija, dobiveni Fourierovi koeficijenti su realni.

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i periodičan, pa je njegov spektar diskretan (vidljivo po  $X_k$ ).

Srednja ukupna snaga u vremenskoj domeni iznosi:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{-0.25}^{0.25} dt = \frac{1}{2}.$$

Srednja ukupna snaga u frekvencijskoj domeni iznosi:

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |X_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 \\ &= \frac{1}{4} + 2 \left( \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + 0 + \left(\frac{-1}{3\pi}\right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{5\pi}\right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{4} + 2 \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vidljivo je da su snaga dobivena u vremenskoj domeni i ona dobivena u frekvencijskoj jednake.

3. Odredite rastav u Fourierov red signala

$$x(t) = 10 \cos(50\pi t) + 5 \sin(100\pi t) + \sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

te skicirajte dobiveni amplitudni i fazni spektar. Ako signal otipkamo s periodom otipkavanja  $T_s = 0.02$  je li došlo do preklapanja spektra?

**Rješenje:**

Zadani signal je periodičan. Njegov period je najmanji zajednički višekratnik perioda svakog pojedinog dijela signala. Ti periodi su:

$$\begin{aligned} 10 \cos(50\pi t) &\rightarrow 50\pi = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{1}{25} s \\ 5 \sin(100\pi t) &\rightarrow 100\pi = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{1}{50} s \\ \sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) &\rightarrow 150\pi = \frac{2\pi}{T_3} \rightarrow T_3 = \frac{1}{75} s \\ \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) &\rightarrow 200\pi = \frac{2\pi}{T_4} \rightarrow T_4 = \frac{1}{100} s \end{aligned}$$

Ukupni period je  $T_0 = \frac{1}{25} s$ . Ostali periodi tada iznose  $T_2 = \frac{T_0}{2}$ ,  $T_3 = \frac{T_0}{3}$ ,  $T_4 = \frac{T_0}{4}$ .

Osnovna kružna frekvencija pri razvoju ovog signala u red je prema tome  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 50\pi$  rad/s.

Frekvencijske komponente signala su onda  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0$ ,  $\omega_3 = 3\omega_0$  i  $\omega_4 = 4\omega_0$ .

Koristeći poznate veze sinusoida i kompleksne eksponencijale

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{aligned}$$

možemo rastaviti zadane sinuse i kosinuse:

$$\begin{aligned} 10 \cos(50\pi t) &= 10 \cos(1 \cdot \omega_0 t) = \frac{10}{2} (e^{j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} + e^{-j \cdot 1 \cdot \omega_0 t}) = 5e^{j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} + 5e^{-j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} \\ 5 \sin(100\pi t) &= 5 \sin(2 \cdot \omega_0 t) = \frac{5}{2j} (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} - e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 t}) = \frac{5}{2} e^{-j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} \\ \sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3 \cdot \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2j} \left( e^{j \cdot (3 \cdot \omega_0 t + \frac{2\pi}{3})} - e^{-j \cdot (3 \cdot \omega_0 t + \frac{2\pi}{3})} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{2}} e^{j \frac{2\pi}{3}} e^{j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{3}} e^{-j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{6}} e^{j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{6}} e^{-j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} \\ \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(4 \cdot \omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left( e^{j \cdot (4 \cdot \omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j \cdot (4 \cdot \omega_0 t + \frac{\pi}{4})} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{4}} e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{4}} e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 t} \end{aligned}$$

Zadani signal je zbroj:

$$x(t) = 5e^{j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} + 5e^{-j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} \\ + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 t}$$

Usporedbom sa formulom za Fourierov red

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\omega_0 k t}$$

direktno možemo očitati vrijednosti Fourierovih koeficijenata:

$$\begin{array}{ll} k = -1 \rightarrow X_{-1} = 5 & k = 1 \rightarrow X_1 = 5 \\ k = -2 \rightarrow X_{-2} = \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} & k = 2 \rightarrow X_2 = \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ k = -3 \rightarrow X_{-3} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} & k = 3 \rightarrow X_3 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}} \\ k = -4 \rightarrow X_{-4} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} & k = 4 \rightarrow X_4 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \end{array}$$

Za sve ostale  $k$  koeficijenti su nula.

Zadani signal je bio kontinuiran i periodičan. Dobiveni spektar je aperiodičan i diskretan.

Dodatak: pokušajte ove koeficijente izračunati uvrštavanjem u formulu  $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ .  
Nacrtajte amplitudni i fazni spektar.

Period očitavanja je  $T_p = 0.02s$ . Frekvencija očitavanja je  $f_s = \frac{1}{0.02} = 50Hz$ . Da ne bi došlo do preklapanja spektra, frekvencija očitavanja mora biti barem dvostruko veća od najveće frekvencije signala. Zadani signal se sastoji od frekvencija  $25Hz, 50Hz, 75Hz, 100Hz$ . Najveća od njih je  $100Hz$ . Da ne bi bilo preklapanja spektra, frekvencija očitavanja bi morala biti barem  $200Hz$ . Kako je zadana frekvencija očitavanja  $50Hz$  dolazi do preklapanja spektra.

4. Izračunajte Fourierove koeficijente vremenski kontinuiranog signala

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k).$$

**Rješenje:**

Zadani signal je kontinuirani signal koji je za sve  $t$  jednak nuli, osim za  $t=4k$  kada je jednak beskonačno. Pri tome je  $k$  cijeli broj. Iz toga slijedi da je ovaj signal periodičan, te da mu je period  $T_0 = 4$ . Jedan period možemo promatrati npr. na intervalu  $(-1,3)$ .

Da bi izračunali njegov Fourierov red moramo uvrstiti u formulu:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$
$$X_k = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 \delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{1}{4} e^{-jk\frac{\pi}{2}0} = \frac{1}{4}.$$

Pa je spektar jednak  $\frac{1}{4}$  za svaki  $k$ . Dobiveni spektar je diskretan.

5. Nađite Fourierove transformacije, te amplitudne, fazne, realne i imaginarne spektre sljedećih signala:

- $x(t) = e^{-t} \mu(t)$ ,
- $x(t) = e^t \mu(-t)$ ,
- $x(t) = e^{-|t|}$ .

Odredite energiju zadanih signala u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni. U kakvom su odnosu ove dvije energije?

### Rješenje:

Fourierova transformacija dana je izrazima

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt.$$

a. Signal  $x(t) = e^{-t} \mu(t)$  je kauzalan, što znači da je prije  $t=0$  nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(1+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po  $\omega$ ).

Amplitudni spektar je  $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

Fazni spektar je  $\angle X(j\omega) = \arctg \frac{-\omega}{\frac{1+\omega^2}{1+\omega^2}} = \arctg(-\omega) = -\arctg(\omega)$

Realni spektar  $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar  $\text{Im}\{X(j\omega)\} = -\frac{\omega}{1+\omega^2}$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t} \mu(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{e^{-2t}}{-2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \right)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \arctg(\omega) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}.$$

b. Signal  $x(t) = e^t \mu(-t)$  je antikauzalan, što znači da je poslije  $t=0$  nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{(-j\omega+1)t}}{1-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{1-j\omega} = \frac{1+j\omega}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po  $\omega$ ).

Amplitudni spektar je  $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

Fazni spektar je  $\angle X(j\omega) = \arctg \frac{\frac{\omega}{1}}{\frac{1+\omega^2}{1+\omega^2}} = \arctg(\omega)$

Realni spektar  $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar  $\text{Im}\{X(j\omega)\} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^t \mu(-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = \left. \frac{e^{2t}}{2} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}$$

Energija iz frekvencijske domene

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1+j\omega}{1+\omega^2} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \right)^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \arctg(\omega) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c. Signal  $x(t) = e^{-|t|}$  je nekauzalan, realan i paran. Njegova CTFT iznosi:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \left. \frac{e^{(-j\omega+1)t}}{1-j\omega} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-(1+j\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po  $\omega$ ).

Amplitudni spektar je  $|X(j\omega)| = \frac{2}{1+\omega^2}$

Fazni spektar je  $\angle X(j\omega) = \arctg \frac{0}{\frac{2}{1+\omega^2}} = 0$

Realni spektar  $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{2}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar  $\text{Im}\{X(j\omega)\} = 0$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|t|}|^2 dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left. \frac{e^{2t}}{2} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-2t}}{-2} \right|_0^{\infty} = 1$$

Energija iz frekvencijske domene

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2}{1+\omega^2} \right|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\omega}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{2} \arctg(\omega) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Energija ovog signala je zbroj energija signala iz a. i b. dijela zadatka. Isto vrijedi i za signale.

Napomena: formule za česte integrale nalaze se u službenom šalabahteru.

Dodatak: skicirajte amplitudne, fazne, realne i imaginarne spektre.

6. Zadan je signal  $x(t) = e^{2t}\mu(-t)$ .
- Nađite Fourierovu transformaciju zadanog signala.
  - Nacrtajte amplitudni i fazni spektar.
  - Odredite energiju signala u vremenskoj domeni.
  - Odredite energiju signala u frekvencijskoj domeni korištenjem Parsevalove jednakosti.

**Rješenje:**

- a. Signal  $x(t) = e^{2t}\mu(-t)$  je antikauzalni, što znači da je poslije  $t=0$  nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{(-j\omega+2)t}}{2-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2-j\omega} = \frac{2+j\omega}{4+\omega^2}.$$

- b. Amplitudni spektar je  $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{2^2+\omega^2}{(4+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$

Fazni spektar je  $\angle X(j\omega) = \arctg \frac{\omega}{\frac{4+\omega^2}{2}} = \arctg \left( \frac{\omega}{2} \right)$

- c. Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 |e^{2t}\mu(-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt = \frac{e^{4t}}{4} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{4}$$

- d. Energija iz frekvencijske domene

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2+j\omega}{4+\omega^2} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \right)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+\omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{\omega}{2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{4\pi} \cdot \pi = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



7. Nađite Fourierovu transformaciju sgn funkcije  $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ .

**Rješenje:**

Zadani signal možemo napisati u obliku  $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = -1 + 2\mu(t)$ .

Fourierovu transformaciju je najlakše odrediti očitavanjem iz tablica Fourierovih transformacija (službeni šalabahter):

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mu(t) \rightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Kako vrijedi svojstvo linearnosti, CTFT zadanog signala je:

$$X(j\omega) = -2\pi\delta(\omega) + 2\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega} = -\frac{2j}{\omega}$$

Druga metoda: koristite pravilo deriviranja CTFT.

8. Nađite Fourierovu transformaciju signala  $x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ .

**Rješenje:**

Fourierova transformacija se računa iz izraza

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Direktnim uvrštavanjem slijedi:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{-j\omega} \left( e^{-\frac{j\omega 5}{2}} - e^{\frac{j\omega 3}{2}} \right) \\ &= \frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{-j\omega} \left( e^{-\frac{j\omega 4}{2}} - e^{\frac{j\omega 4}{2}} \right) \\ &= e^{-\frac{j\omega}{2}} \frac{2 \sin(2\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

9. Objasnite koju Fourierovu transformaciju smijete koristiti za analizu signala  $x(t) = 220 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ . Izračunajte amplitudni i fazni spektar signala  $x(t)$  korištenjem odabrane transformacije. Odredite snagu ovog signala.

**Rješenje:**

Zadan je kontinuirani periodičan signal. Spektar će mu biti diskretan aperiodičan. Zato moramo koristiti vremenski kontinuiran Fourierov red – CTFS.

Period zadanog signala je  $50\pi T_p = 2k\pi \rightarrow T_p = \frac{1}{25} s$ .

Signal se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} x(t) &= 220 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{220}{2j} \left( e^{j\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)} - e^{-j\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)} \right) \\ &= 110e^{-j\frac{\pi}{2}} \left( e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{2\pi}{1/25}t} - e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{1/25}t} \right). \end{aligned}$$

Traženi koeficijenti su

$$X_1 = 110e^{-j\frac{\pi}{6}}, \quad X_{-1} = 110e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Amplitudni spektar je svugdje nula osim u uzorcima:

$$|X_1| = 110, \quad |X_{-1}| = 110$$

Fazni spektar je svugdje nula osim u uzorcima:

$$\angle X_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \angle X_{-1} = \frac{\pi}{6}$$

Snaga signala se računa prema:

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = 110^2 + 110^2 = 24200.$$